Mathe Tutorial: Bruchrechnung

Home | Rechnen | Gleich-ungen | Differential | Geometrie | Funktionen | Grafisch | Rechner | Tools | Kontakt

Bruchrechnung

Als Bruch bezeichnet man den Quotienten zweier Zahlen also die Divisionsaufgabe m : n, die allgemein mit einem Bruchstrich geschrieben wird. Dabei wird der Wert auf dem Bruchstrich als Zähler und der Wert unter dem Bruchstrich als Nenner bezeichnet.

Allgemeiner Bruch mit den Zahlen m und n

$$m : n = \frac{m}{n}$$

dabei ist m der Zähler und n der Nenner des Bruchs.

Beispiele für Brüche

$$7 : 8 = \frac{7}{8}$$

Bruch mit dem Zähler 7 und dem Nenner 8

$$\frac{ax^2+by}{ax}$$

Allgemeineres Beispiel mit einer Summe im Zähler des Bruchs

Kürzen

Als Kürzen bezeichnet man das Reduzieren eines Bruchs um einen Faktor, der sowohl im Zähler wie auch im Nenner auftritt. Beim Kürzen wird ein gemeinsamer Faktor von Zähler und Nenner eines Bruches entfernt, wobei sich der Wert des Bruches nicht ändert. Kürzt man mit dem größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner, entsteht ein Bruch, der nicht weiter kürzbar ist.

Allgemeines Kürzen eines Bruchs:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

Sind im Zähler und/oder Nenner Summen vorhanden muß jeweils der gemeinsame Faktor in allen Summanden vorhanden sein und in jedem Summanden gekürzt werden:

$$\frac{a \cdot c + b \cdot c}{x \cdot c + y \cdot c} = \frac{c\,(a+b)}{c\,(x+y)} = \frac{c}{c} \cdot \frac{a+b}{x+y} = \frac{a+b}{x+y}$$

Beispiele für das Kürzen von Brüchen

$$\frac{12}{16} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{4} = \frac{3}{4}$$

In 12 und 16 ist der gemeinsame Faktor 4 durch den gekürzt werden kann. 4 ist der größte gemeinsame Teiler von 12 und 16. Zerlegt man den Bruch in das Produkt so entsteht als ein Faktor der Bruch 4/4 und der Wert dieses Bruchs ist 1.

$$\frac{ax^2+axy}{ax} = \frac{ax(x+y)}{ax} = \frac{ax}{ax} \cdot \frac{x+y}{1} = x + y$$

In der Summe im Zähler ist der gemeinsame Faktor a·x enthalten und kann gekürzt werden.

Unter dem Erweitern eines Bruchs versteht man das Gegenteil des Kürzens. D.h. man multipliziert Zähler und Nenner mit dem gleichen Faktor und ändert so nicht den Wert des Bruchs, da der Bruch insgesamt mit 1 multipliziert wird.

Addition

Die Addition von Brüchen erfolgt, indem man die Brüche so ergänzt, dass sie einen gemeinsamen Nenner bekommen.

Allgemeine Addition zweier Brüche:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Beispiel für die Addition von Brüchen

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6}$$

Erweitern der Brüche auf den Hauptnenner (kgV) 6 und zusammenfassen. Dabei muß jeder Nenner mit einem Faktor zum Hauptnenner multipliziert werden. Um den Wert des Bruchs nicht zu verändern wird der Faktor auch im Zähler multipliziert. Die Multiplikation eines Faktors in Zähler und Nenner bezeichnet man als Erweitern des Bruchs.

Rationale Zahlen

Die Menge aller Brüche aus natürlichen Zahlen bildet die Menge der rationalen Zahlen. Die natürlichen Zahlen sind eine Teilmenge der rationalen Zahlen. Die natürlichen Zahlen sind in den rationalen Zahlen als sog. unechte Brüche (m:1) enthalten.

Größter gemeinsamer Teiler (ggT)

Der ggT ist die größte natürliche Zahl, durch die sich zwei ganze Zahlen ohne Rest teilen lassen.

Rechner für ggT

Der größte gemeinsame Teiler von 35 **und** 42 **ist**

$$\mathrm{ggT}\,(35, 42) = 7$$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier ganzer Zahlen m und n ist die kleinste natürliche Zahl, die sowohl Vielfaches von m als auch Vielfaches von n ist. Der kleinstmögliche gemeinsame Nenner (der sog. Hauptnenner) zweier Brüche ist das kgV.

Rechner für kgV

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 **und** 5 **ist**

$$\mathrm{kgV}\,(3, 5) = 15$$

Besondere Brüche

Ein Bruch mit dem Zähler Null hat den Wert Null.

$$\frac{0}{a} = 0$$

Ein Bruch mit dem Nenner Eins hat den Wert des Zählers.

$$\frac{a}{1} = a$$

Sind Zähler und Nenner in einem Bruch gleich hat der Bruch den Wert Eins.

$$\frac{a}{a} = 1$$

Eine Division nur Null ist nicht definiert.

$$\frac{a}{0} = \text{nicht definiert}$$

Rechner für die numerische Addition zweier Brüche

Der Rechner kann auch zur Subtraktion verwendet werden, wenn der Zähler eines Bruchs mit negativem Vorzeichen eingegeben wird.

2 / 7 + 3 / 9

$$\mathrm{kgV}\,(7,9) = 63$$

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{9} = \frac{2\cdot 9}{7\cdot 9} + \frac{3\cdot 7}{9\cdot 7} = \frac{2\cdot 9}{63} + \frac{3\cdot 7}{63} = \frac{2\cdot 9 + 3\cdot 7}{63}$$

$$= \frac{39}{63} = \frac{13}{21}$$

Rechner für die symbolische Addition zweier Brüche

a+b / a + 2x+1+b / y+1

$$\frac{\mathrm{a+b}}{a} + \frac{\mathrm{2x+1+b}}{\mathrm{y+1}} = \frac{(\mathrm{a+b})\cdot(\mathrm{y+1})}{(a)\cdot(\mathrm{y+1})} + \frac{(\mathrm{2x+1+b})\cdot(a)}{(\mathrm{y+1})\cdot(a)}$$

$$= \frac{(\mathrm{a+b})\cdot(\mathrm{y+1}) + (\mathrm{2x+1+b})\cdot(a)}{(a)\cdot(\mathrm{y+1})}$$

Subtraktion

Die Subtraktion von Brüchen erfolgt analog der Addition.
Allgemeine Subtraktion zweier Brüche:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot d} - \frac{c\cdot b}{d\cdot b} = \frac{a\cdot d - c\cdot b}{b\cdot d}$$

Beispiel für die Subtraktion von Brüchen

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} - \frac{2\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{1\cdot 3 - 2\cdot 2}{2\cdot 3} = -\frac{1}{6}$$

Erweitern der Brüche auf den Hauptnenner 6 analog zur Addition und zusammenfassen unter Berücksichtigung des Vorzeichens

Beispiel für die Addition/Subtraktion von Brüchen in Teilschritten

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{-15}$$

An diesem Beispiel werden exemplarisch alle Teilschritte erläutert.

$$= \frac{4}{9} - \frac{2}{15}$$

1. Schritt: Negative Vorzeichen in Zähler oder Nenner werden vor den Bruch gezogen. Es gilt - mal - ergibt + und - mal + ergibt -. Das Minus im Nenner des zweiten Bruchs wird mit dem Plus vor dem Bruch multipliziert und + mal - ergibt -.

$$= \frac{4\cdot 5}{9\cdot 5} - \frac{2\cdot 3}{15\cdot 3} = \frac{4\cdot 5}{45} - \frac{2\cdot 3}{45}$$

2. Schritt: Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner.

Vielfache von 9 sind 9; 18; 27; 36; 45

Vielfache von 15 sind 15; 30; 45

Der kgV ist also 45. D.h. beide Brüche müssen so erweitert werden, dass der Nenner 45 wird. Dazu wird der erste Bruch mit 45/9 also 5 erweitert und der zweite Bruch mit 45/15 also 3 erweitert.

Vorzeichen von Brüchen

Brüche die im Zähler und Nenner das gleiche Vorzeichen haben sind positiv.

$$\frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Der Quotient zweier Zahlen mit ungleichem Vorzeichen ist negativ. Daraus folgt, dass die Vorzeichen von Zähler und Nenner vertauscht werden können.

$$\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$

Ein Vorzeichen vor dem Bruch kann entweder in den Zähler oder den Nenner gebracht werden.

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Weiterführende Artikel bei Wikipedia

- Bruchrechnung
- ggT
- kgV

Literatur

$$= \frac{4 \cdot 5 - 2 \cdot 3}{45}$$

3. Schritt: Die Brüche sind jetzt auf Hauptnenner gebracht und können auf einen gemeinsamen Bruchstrich geschrieben werden.

$$= \frac{14}{45}$$

4. Schritt: Ausrechnen des Zählers liefert das Ergebnis. Es bleibt noch zu prüfen, ob der Bruch einen gemeinsamen Teiler hat durch den gekürzt werden kann.

Teiler von 14 sind 1; 2; 7; 14

Teiler von 45 sind 1; 3; 5; 9; 15; 45

Der größte gemeinsame Teiler ist also 1. D.h. der Bruch kann nicht weiter gekürzt werden. Andernfalls hätte man Zähler und Nenner noch durch den ggT geteilt.

Multiplikation

Die Multiplikation von Brüchen erfolgt indem die Zähler und die Nenner jeweils multipliziert werden.
Allgemeine Multiplikation zweier Brüche:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Beispiel für die Multiplikation von Brüchen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Multiplizieren von Zähler und Nenner und anschließendes Kürzen des Bruchs

Division

Die Division von Brüchen erfolgt indem der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert wird.
Allgemeine Division zweier Brüche:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Beispiel für die Division von Brüchen mit Hauptbruchstrich

$$\frac{\frac{a+b}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

An diesem Beispiel werden exemplarisch alle Teilschritte erläutert.

$$= \frac{\frac{x(a+b)}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

1. Schritt: Die Brüche im Zähler werden auf Hauptnenner gebracht. D.h. der erste Bruch wird mi x erweitert.

$$= \frac{\frac{x(a+b)}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{\mathrm{x}}{x} + \frac{1}{x}}$$

2. Schritt: Die Brüche im Nenner werden auf Hauptnenner gebracht.

$$= \frac{\frac{x(a+b)+1}{x^2}}{\frac{\mathrm{x}+1}{x}}$$

3. Schritt: Jetzt können der Bruch im Zähler und der Bruch im Nenner auf ihren jeweiligen Hauptnenner geschrieben werden.

$$= \frac{(x\,(a+b)+1)x}{x^2\,(\mathrm{x}+1)}$$

4. Schritt: Ausführen der Division indem die Brüche im Kehrwert multipliziert werden.

$$= \frac{x\,(a+b)+1}{x\,(\mathrm{x}+1)}$$

5. Schritt: x kann noch gekürzt werden.

Potenzen

Ein Bruch wird zur Potenz erhoben indem Zähler und Nenner potenziert werden.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Wurzeln

Die Wurzel eines Bruchs ergibt sich aus dem Quotienten der Wurzeln aus Zähler und Nenner des Bruchs.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Beispiel für einen Bruch mit Wurzeln

$$\sqrt{\frac{ax^2}{(a-b)}} = \frac{\sqrt{ax^2}}{\sqrt{(a-b)}} = \frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{(a-b)}}$$

Die Wurzel wird auf Zähler und Nenner angewandt.